Matrices de rotación

Javier Múgica de Rivera

24 de febrero de 2014

0. Propiedades

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Definición: Las filas tienen módulo 1 y son ortogonales dos a dos.

Puede demostrarse que con esta definición también las columnas tienen módulo 1 y son ortogonales dos a dos.

Es una rotación de ángulo θ respecto a una recta. La parametrización en función de θ y de los cosenos directores de la recta es la 4 de este documento.

$$m_{11} + m_{22} + m_{33} = 1 + 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{m_{11} + m_{22} + m_{33} - 1}{2}$$

$$q = \frac{\sqrt{1 + m_{11} + m_{22} + m_{33}}}{2} = \cos\tfrac{\theta}{2}$$

$$|\mathrm{M}| = 1$$

$$m_{33} = \cos(\text{ángulo de inclinación})$$

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = m_{33}$$

$$m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{21}^2 + m_{22}^2 = 1 + m_{33}^2$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32} \\ m_{12} &= m_{23}m_{31} - m_{21}m_{33} \\ m_{13} &= m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31} \\ m_{22} &= m_{33}m_{11} - m_{31}m_{13} \\ m_{23} &= m_{31}m_{12} - m_{32}m_{11} \\ m_{21} &= m_{32}m_{13} - m_{33}m_{12} \\ m_{33} &= m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \\ m_{31} &= m_{12}m_{23} - m_{13}m_{22} \\ m_{32} &= m_{13}m_{21} - m_{11}m_{23} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &(m_{12} + m_{21})(1 + m_{33}) = m_{23}m_{31} + m_{13}m_{32} \\ &\quad\vdots \\ &m_{12}(1 - m_{33}^2) = m_{23}m_{31} - m_{13}m_{32}m_{33} \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Si $\theta = 180°$ la matriz es simétrica. Véase la parametrización de estas matrices en la matriz 4.

El criterio seguido a lo largo de este documento es que un giro en el plano de ánglo θ es de la forma $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Esto se corresponde bien con un giro θ del espacio en sentido antihorario, bien con un giro θ de los ejes en sentido horario.

1. Ω, Φ, K

$-\pi/2 \leq \Phi \leq \pi/2$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \cos \mathrm{K} & -\operatorname{sen} \mathrm{K} & 0 \\ \operatorname{sen} \mathrm{K} & \cos \mathrm{K} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Phi & 0 & \operatorname{sen} \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \Phi & 0 & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & -\operatorname{sen} \Omega \\ 0 & \operatorname{sen} \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \mathrm{K} \cos \Phi & \cos \mathrm{K} \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \mathrm{K} \cos \Omega & \cos \mathrm{K} \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{sen} \mathrm{K} \operatorname{sen} \Omega \\ \operatorname{sen} \mathrm{K} \cos \Phi & \operatorname{sen} \mathrm{K} \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi + \cos \mathrm{K} \cos \Omega & \operatorname{sen} \mathrm{K} \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi - \cos \mathrm{K} \operatorname{sen} \Omega \\ -\operatorname{sen} \Phi & \operatorname{sen} \Omega \cos \Phi & \cos \Omega \cos \Phi \end{pmatrix}$$

Si Φ está próximo a $\pm 90^\circ$ los valores de Ω y K no están bien definidos, pero: Si $\Phi \approx 90^\circ$, $\mathrm{K} - \Omega$ está bien definido y debe respetarse; si $\Phi \approx -90^\circ$, $\mathrm{K} + \Omega$ está bien definido y debe respetarse.

$$\operatorname{sen}(\mathrm{K} - \Omega) = \frac{m_{23} - m_{12}}{1 - m_{31}} \qquad \cos(\mathrm{K} - \Omega) = \frac{m_{22} + m_{13}}{1 - m_{31}}$$

$$\operatorname{sen}(\mathrm{K} + \Omega) = -\frac{m_{23} + m_{12}}{1 + m_{31}} \qquad \cos(\mathrm{K} + \Omega) = \frac{m_{22} - m_{13}}{1 + m_{31}}$$

2. $\mathrm{K}_0, i(-\Omega), \mathrm{K}_1$

$0 \leq i < \pi$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \cos \mathrm{K}_1 & -\operatorname{sen} \mathrm{K}_1 & 0 \\ \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 & \cos \mathrm{K}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \operatorname{sen} i \\ 0 & -\operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mathrm{K}_0 & -\operatorname{sen} \mathrm{K}_0 & 0 \\ \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 & \cos \mathrm{K}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 - \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 \cos i & -\cos \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 - \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 \cos i & -\operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 + \cos \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 \cos i & -\operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 + \cos \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 \cos i & \cos \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} i \\ -\operatorname{sen} \mathrm{K}_0 \operatorname{sen} i & -\cos \mathrm{K}_0 \operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix}$$

Si i está próximo a 0° o 180° los valores de K_0 y K_1 no están bien definidos, pero: Si $i \approx 0^\circ$, $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_0$ está bien definido y debe respetarse; si $i \approx 180^\circ$, $\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_0$ está bien definido y debe respetarse.

$$\operatorname{sen}(\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_0) = \frac{m_{21} - m_{12}}{1 + m_{33}} \qquad \cos(\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_0) = \frac{m_{11} + m_{22}}{1 + m_{31}}$$

$$\operatorname{sen}(\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_0) = \frac{m_{21} + m_{12}}{1 - m_{31}} \qquad \cos(\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_0) = \frac{m_{11} - m_{22}}{1 - m_{31}}$$

3. $\mathrm{K}_0, i(\Omega), \mathrm{K}_1$

$0 \le i < \pi$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \cos \mathrm{K}_1 & -\operatorname{sen} \mathrm{K}_1 & 0 \\ \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 & \cos \mathrm{K}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\operatorname{sen} i \\ 0 & \operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mathrm{K}_0 & -\operatorname{sen} \mathrm{K}_0 & 0 \\ \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 & \cos \mathrm{K}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 - \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 \cos i & -\cos \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 - \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 \cos i & \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 + \cos \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 \cos i & -\operatorname{sen} \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 + \cos \mathrm{K}_1 \cos \mathrm{K}_0 \cos i & -\cos \mathrm{K}_1 \operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} \mathrm{K}_0 \operatorname{sen} i & \cos \mathrm{K}_0 \operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix}$$

Lo dicho respecto a i en la parametrización anterior es también de aplicación en esta, y las fórmulas son las mismas.

4. $\alpha, \beta, \gamma, \theta$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1-(\beta^2+\gamma^2)(1-\cos\theta) & -\gamma \operatorname{sen}\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta) & \beta \operatorname{sen}\theta + \gamma\alpha(1-\cos\theta) \\ \gamma \operatorname{sen}\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta) & 1-(\alpha^2+\beta^2)(1-\cos\theta) & -\alpha \operatorname{sen}\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta) \\ -\beta \operatorname{sen}\theta + \gamma\alpha(1-\cos\theta) & \alpha \operatorname{sen}\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta) & 1-(\gamma^2+\alpha^2)(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Si $\theta = 180°$:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1+2\alpha^2 & 2\alpha\beta & 2\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta & -1+2\beta^2 & 2\beta\gamma \\ 2\alpha\gamma & 2\beta\gamma & -1+2\gamma^2 \end{pmatrix}$$

En esta parametrización y las que siguen hasta la 10, cerca de la singularidad: $\theta \approx 180°$, el signo de los parámetros no está bien definido pero sí el signo de sus productos dos a dos, y debe ser respetado.

Las parametrizaciones que siguen son todas de la forma

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}t(\phi^2+\kappa^2) & -s\kappa + \frac{1}{2}t\omega\phi & s\phi + \frac{1}{2}t\kappa\omega \\ s\kappa + \frac{1}{2}t\omega\phi & 1-\frac{1}{2}t(\kappa^2+\omega^2) & -s\omega + \frac{1}{2}t\phi\kappa \\ -s\phi + \frac{1}{2}t\kappa\omega & s\omega + \frac{1}{2}t\phi\kappa & 1-\frac{1}{2}t(\omega^2+\phi^2) \end{pmatrix}$$

diferenciándose únicamente en s y t, funciones simétricas de los parámetros.

---

5. a, b, c $(\alpha\theta)$

En la parametrización anterior hacemos $\theta\alpha = a$, etc.

$\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$

$\sigma = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}, \qquad \frac{1}{2}\tau = \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$

Sea $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Por el significado de a, b y c se cumple para cualquier n la ecuación $\mathrm{M} = \mathrm{M}^n_{\frac{a}{n},\frac{b}{n},\frac{c}{n}}$. Cuando n es muy grande se tiene $\mathrm{M}_{\frac{a}{n},\frac{b}{n},\frac{c}{n}} \approx \mathrm{I} + \dfrac{1}{n}\mathrm{A}$, de donde

$$\mathrm{M} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{I} + \frac{1}{n}\mathrm{A}\right)^n = e^{\mathrm{A}} = \mathrm{I} + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{AA}}{2} + \frac{\mathrm{AAA}}{3!} + \frac{\mathrm{A}^4}{4!} + \cdots$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\tau(b^2 + c^2) & -\sigma c + \frac{1}{2}\tau ab & \sigma b + \frac{1}{2}\tau ca \\ \sigma c + \frac{1}{2}\tau ab & 1 - \frac{1}{2}\tau(a^2 + b^2) & -\sigma a + \frac{1}{2}\tau bc \\ -\sigma b + \frac{1}{2}\tau ca & \sigma a + \frac{1}{2}\tau bc & 1 - \frac{1}{2}\tau(c^2 + a^2) \end{pmatrix}$$

Si θ no está próximo a $180°$,

$$\cos\theta = \frac{m_{11} + m_{22} + m_{33} - 1}{2}$$

$$c = \frac{m_{21} - m_{12}}{2\sigma} \qquad a = \frac{m_{32} - m_{23}}{2\sigma} \qquad b = \frac{m_{13} - m_{31}}{2\sigma}$$

Si $\cos\theta > 0{,}998$ $(\theta < 3°6)$, se puede obtener σ como:

$$\beta = \tfrac{2}{3}(1 - \cos\theta), \qquad \sigma = \cos\theta + \beta - \frac{\beta^2}{20}, \quad \text{con un error menor de } 4\cdot 10^{-11}$$

En caso contrario, sea por ejemplo $m_{11} = \max\{m_{11}, m_{22}, m_{33}\}$:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + m_{11} - m_{22} - m_{33}}{3 - (m_{11} + m_{22} + m_{33})}}, \qquad \operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}(m_{32} - m_{23})$$

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{m_{32} - m_{23}}{2\alpha} \qquad \theta = \pi - \varepsilon \qquad \tfrac{1}{2}\tau = \frac{1 + \cos\varepsilon}{\theta^2}$$

$$a = \theta\alpha \qquad b = \frac{m_{12} + m_{21}}{\frac{1}{2}\tau a} \qquad c = \frac{m_{13} + m_{31}}{\frac{1}{2}\tau a}$$

Si el máximo fuese m_{22} o m_{33}, se obtienen los valores rotando los índices y las letras en las fórmulas anteriores.

6. ω, ϕ, κ $(\alpha\, 2 \operatorname{sen}\theta/2)$

En la parametrización 4 hacemos $\omega = \alpha\, 2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, etc.

$q = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}\phi^2 - \frac{1}{4}\kappa^2} = \cos\theta 2$

$s = q \qquad t = 1$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\phi^2+\kappa^2) & -q\kappa + \frac{1}{2}\omega\phi & q\phi + \frac{1}{2}\kappa\omega \\ q\kappa + \frac{1}{2}\omega\phi & 1 - \frac{1}{2}(\kappa^2+\omega^2) & -q\omega + \frac{1}{2}\phi\kappa \\ -q\phi + \frac{1}{2}\kappa\omega & q\omega + \frac{1}{2}\phi\kappa & 1 - \frac{1}{2}(\omega^2+\phi^2) \end{pmatrix}$$

Si q no es muy pequeño,

$$2q = \sqrt{1 + m_{11} + m_{22} + m_{33}}$$

$$\kappa = \frac{m_{21} - m_{12}}{2q} \qquad \omega = \frac{m_{32} - m_{23}}{2q} \qquad \phi = \frac{m_{13} - m_{31}}{2q}$$

En caso contrario, sea por ejemplo $m_{11} = \text{máx}\{m_{11}, m_{22}, m_{33}\}$:

$$\omega = \sqrt{1 + m_{11} - m_{22} - m_{33}}, \qquad \operatorname{sgn}\omega = \operatorname{sgn}(m_{32} - m_{23})$$

$$\phi = \frac{m_{12} + m_{21}}{\omega} \qquad \kappa = \frac{m_{13} + m_{31}}{\omega}$$

Si el máximo fuese m_{22} o m_{33}, se obtienen los valores rotando los índices y las letras en las fórmulas anteriores.

7. ω, ϕ, κ $(\alpha\, 2 \tan\theta/2)$

En la parametrización 4 hacemos $\omega = \alpha\, 2 \tan\frac{\theta}{2}$, etc.

$p = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\omega^2 + \phi^2 + \kappa^2\right)} = \cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos\theta}{2}$

$s = t = p$

$$\mathrm{M} = \mathrm{I} + \mathrm{N} = \mathrm{I} + p \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\phi^2+\kappa^2) & -\kappa + \frac{1}{2}\omega\phi & \phi + \frac{1}{2}\kappa\omega \\ \kappa + \frac{1}{2}\omega\phi & -\frac{1}{2}(\kappa^2+\omega^2) & -\omega + \frac{1}{2}\phi\kappa \\ -\phi + \frac{1}{2}\kappa\omega & \omega + \frac{1}{2}\phi\kappa & -\frac{1}{2}(\omega^2+\phi^2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -p\kappa & p\phi \\ p\kappa & 1 & -p\omega \\ -p\phi & p\omega & 1 \end{pmatrix} + \frac{p}{2} \begin{pmatrix} -(\phi^2+\kappa^2) & \omega\phi & \kappa\omega \\ \omega\phi & -(\kappa^2+\omega^2) & \phi\kappa \\ \kappa\omega & \phi\kappa & -(\omega^2+\phi^2) \end{pmatrix}$$

Si p no es muy pequeño,

$$2p = \frac{1 + m_{11} + m_{22} + m_{33}}{2}$$

$$\kappa = \frac{m_{21} - m_{12}}{2p} \qquad \omega = \frac{m_{32} - m_{23}}{2p} \qquad \phi = \frac{m_{13} - m_{31}}{2p}$$

No conviene emplear esta parametrización cuando p es muy pequeño.

8. ω, ϕ, κ ($\alpha \operatorname{sen} \theta$)

En la parametrización 4 hacemos $\omega = \alpha \operatorname{sen} \theta$, etc.

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (\omega^2 + \phi^2 + \kappa^2)}} = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

$$s = 1 \qquad t = 2q$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 - q(\phi^2 + \kappa^2) & -\kappa + q\omega\phi & \phi + q\kappa\omega \\ \kappa + q\omega\phi & 1 - q(\kappa^2 + \omega^2) & -\omega + q\phi\kappa \\ -\phi + q\kappa\omega & \omega + q\phi\kappa & 1 - q(\omega^2 + \phi^2) \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \tfrac{1}{2}(m_{21} - m_{12}) \qquad \omega = \tfrac{1}{2}(m_{32} - m_{23}) \qquad \phi = \tfrac{1}{2}(m_{13} - m_{31})$$

Esta parametrización se puede emplear para rotaciones pequeñas, tomando en q el signo de la raíz cuadrada como positivo, o en torno a 180° tomando el signo de la raíz cuadrada negativo. Para valores de giro en torno a 90° esta parametrización no se puede emplear porque una misma terna (ω, ϕ, κ) parametriza dos rotaciones distintas y porque variaciones apreciables de la matriz suponen variaciones muy pequeñas de los parámetros.

9. Primero, segundo y tercer orden

Todas las parametrizaciones ω, ϕ, κ así como Ω, Φ, K y a, b, c son en primer orden iguales a

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa & \phi \\ \kappa & 1 & -\omega \\ -\phi & \omega & 1 \end{pmatrix}$$

Todas las anteriores excepto Ω, Φ, K son en segundo orden

$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(\phi^2 + \kappa^2) & \omega\phi & \kappa\omega \\ \omega\phi & -(\kappa^2 + \omega^2) & \phi\kappa \\ \kappa\omega & \phi\kappa & -(\omega^2 + \phi^2) \end{pmatrix}$$

Sus componentes de tercer orden se diferencian en factores constantes. Para a, b, c es

$$\frac{\mathrm{A}^3}{6} = -\tfrac{\theta^2}{6}\mathrm{A} = \frac{a^2+b^2+c^2}{6}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\overrightarrow{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ los parámetros de la matriz M_1 y $\overrightarrow{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ los de M_2, en la parametrización (a, b, c). Los de $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1$ son

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3 + \cdots \\ &= (\overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_1) + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{u}_2 \times \overrightarrow{u}_1) + \tfrac{1}{6}(\overrightarrow{u}_2 - \overrightarrow{u}_1) \times \overrightarrow{v}_2 + \cdots\end{aligned}$$

10. Derivadas sencillas

En lugar de escribir $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\omega + \mathrm{d}\omega, \phi + \mathrm{d}\phi, \kappa + \mathrm{d}\kappa)$, el incremento se aplica como

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_\Delta \mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa & \phi \\ \kappa & 1 & -\omega \\ -\phi & \omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Las derivadas son

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & -m_{33} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ -m_{11} & -m_{12} & -m_{13} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \kappa} = \begin{pmatrix} -m_{21} & -m_{22} & -m_{23} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidos (ω, ϕ, κ) se puede calcular una matriz M_Δ exacta mediante una qualquiera de las parametrizaciones que coinciden en primer orden. Por ejemplo la 6, que no incluye raíces cuadradas ni razones trigonométricas.

Más aún, si como sucede habitualmente tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$$

y escribimos $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\Delta \mathrm{M}_0$, las derivadas son

$$\begin{array}{lll} \partial x/\partial \omega = 0 & \partial x/\partial \phi = z & \partial x/\partial \kappa = -y \\ \partial y/\partial \omega = -z & \partial y/\partial \phi = 0 & \partial y/\partial \kappa = x \\ \partial z/\partial \omega = y & \partial z/\partial \phi = -x & \partial z/\partial \kappa = 0 \end{array}$$

En la expresión anterior (X Y Z) puede ser a su vez el resultado de una expresión complicada. Lo único que importa es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{M}_\Delta \mathrm{M}_0 \cdot \textit{algo más}$$

11. Conmutatividad

Las matrices de rotación no satisfacen la propiedad conmutativa respeto al producto. Se cumple sin embargo si las dos rotaciones que se multiplican son respecto al mismo eje. En la parametrización 9 esto significa valores a, b, c proporcionales. En general

$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_\Delta = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_\Delta(\mathrm{M}_1^{-1}\mathrm{M}_1) = (\mathrm{M}_1\mathrm{M}_\Delta\mathrm{M}_1^{-1})\mathrm{M}_1 = (\mathrm{M}_1\mathrm{M}_\Delta\mathrm{M}_1^{\mathsf{T}})\mathrm{M}_1$$

Si M_Δ es muy pequeña entonces, en primer orden,

$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \left(\mathrm{I} + \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & \phi \\ \kappa & 0 & -\omega \\ -\phi & \omega & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \right\} \mathrm{M}_1$$

$$= \left\{ \mathrm{I} + \begin{pmatrix} m_{12}\kappa - m_{13}\phi & m_{13}\omega - m_{11}\kappa & m_{11}\phi - m_{12}\omega \\ m_{22}\kappa - m_{23}\phi & m_{23}\omega - m_{21}\kappa & m_{21}\phi - m_{22}\omega \\ m_{32}\kappa - m_{33}\phi & m_{33}\omega - m_{31}\kappa & m_{31}\phi - m_{32}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \right\} \mathrm{M}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -(m_{31}\omega + m_{32}\phi + m_{33}\kappa) & m_{21}\omega + m_{22}\phi + m_{23}\kappa \\ m_{31}\omega + m_{32}\phi + m_{33}\kappa & 1 & -(m_{11}\omega + m_{12}\phi + m_{13}\kappa) \\ -(m_{21}\omega + m_{22}\phi + m_{23}\kappa) & m_{11}\omega + m_{12}\phi + m_{13}\kappa & 1 \end{pmatrix} \mathrm{M}_1$$

Es decir,

$$\mathrm{M} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa & \phi \\ \kappa & 1 & -\omega \\ -\phi & \omega & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa' & \phi' \\ \kappa' & 1 & -\omega' \\ -\phi' & \omega' & 1 \end{pmatrix} \mathrm{M}$$

con

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \phi' \\ \kappa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \phi \\ \kappa \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} \omega \\ \phi \\ \kappa \end{pmatrix}$$